

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

J.-F. WALHIN, Bruxelles

Une nouvelle caractérisation de la distribution de Pareto, avec application à la cadence de paiement du réassureur en excédent de sinistre

1 Introduction

La réassurance en excédent de sinistre couvre la portion de chaque sinistre individuel exédant une priorité donnée, limitée à une capacité maximale octroyée par le réassureur.

Nous nous placerons dans le cadre du modèle collectif de risque. Soient N le nombre de sinistres et X_1, \dots, X_N des réalisations de X , qui est la variable aléatoire représentant les montants de sinistre. Comme d'habitude, nous supposons l'indépendance mutuelle des variables aléatoires.

Soit alors D la priorité dont il est question ci-dessus, ou encore franchise, et soit C la couverture (capacité) offerte par le réassureur. Alors, la portion de chaque sinistre X_i , $i = 1, \dots, N$ à charge du réassureur vaut

$$R_i = \min(C, \max(0, X_i - D)).$$

Lorsque l'assureur ou le réassureur tarifie une branche à développement long, il peut octroyer à son client une réduction financière due à l'inversion du cycle économique en assurance. En effet, la prime d'assurance ou de réassurance est perçue au temps $t = 0$, alors que les sinistres seront payés plus tard; des périodes de règlement supérieures à 15 ans ne sont pas exceptionnelles en responsabilité civile automobile ou générale. Nous supposerons que la vitesse de paiement des sinistres au premier franc a été estimée. Soit V_j la fraction (cumulative) du sinistre payée au temps $t = j$, $j = 1, \dots, n$. Les années j sont dites années de développement. V_j est une variable aléatoire.

Nous ferons l'hypothèse que V_j est indépendante de X_i , c'est-à-dire que la vitesse de paiement au premier franc est indépendante de la gravité du sinistre. Cette hypothèse est évidemment très critiquable si nous considérons tous les sinistres d'un portefeuille, à savoir les sinistres récurrents (petits), qui sont en général payés relativement vite, et les grands sinistres, qui sont en général payés plus

lentement du fait de la détermination des responsabilités, de la consolidation des blessures,

Dans cet article, nous nous restreignons volontairement aux grands sinistres, ceux qui sont susceptibles de toucher la tranche de réassurance en excédent de sinistre. On peut toujours critiquer l'indépendance entre les V_j et les X_i sachant que les X_i sont grands mais force est de constater que la taille des échantillons de grands sinistres est en général trop petite pour pouvoir espérer déceler une dépendance statistiquement significative entre V_j et X_i .

L'objet de l'article est d'analyser la vitesse de paiement du réassureur lorsqu'il connaît la vitesse de paiement au premier franc, et que les grands sinistres se comportent selon une distribution de Pareto. La vitesse de paiement du réassureur est définie comme étant le rapport entre les paiements cumulés moyens jusqu'en j et les paiements totaux moyens.

Le reste de l'article est organisé comme suit. La section 2 énumère les raisons pour lesquelles la distribution de Pareto fait l'objet d'une attention particulière auprès des réassureurs. La section 3 fournit la vitesse de paiement dans la tranche de réassurance en excédent de sinistre lorsque la sinistralité est modélisée par une distribution de Pareto. Cette vitesse de paiement ne dépend pas de la tranche de réassurance considérée. La section 4 montre que cette indépendance caractérise la distribution de Pareto. La section 5 relaxe l'hypothèse de vitesse de paiement déterministe afin d'analyser l'effet d'une vitesse de paiement stochastique sur la vitesse de paiement attendue du réassureur. La section 6 présente quelques applications numériques montrant le danger lié à une hypothèse de vitesse de paiement déterministe. La section 7 propose une conclusion.

2 Distribution de Pareto

La distribution de Pareto est traditionnellement utilisée par les réassureurs en excédent de sinistre essentiellement du fait de ses bonnes propriétés mathématiques, et en particulier de la simplicité des formules résultant de son application.

Soit X une variable aléatoire. Nous dirons que X est distribuée selon une Pareto de paramètres A et α (notation $X \sim Pa(A, \alpha)$) si sa fonction de répartition $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$ s'écrit :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 0, & x \leq A, \\ &= 1 - \left(\frac{x}{A}\right)^{-\alpha}, & x > A. \end{aligned}$$

Sa fonction de densité vaut

$$f_X(x) = 0, \quad x \leq A, \\ = \alpha A^\alpha x^{-\alpha-1}, \quad x > A.$$

L'espérance d'une Pareto est donnée par

$$\mathbb{E}X = A \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1.$$

Cette espérance n'existe pas dès lors que $\alpha \leq 1$.

La variance d'une Pareto est donnée par

$$\mathbb{V}\text{ar}X = A^2 \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2.$$

Cette variance n'existe pas dès lors que $\alpha \leq 2$.

Mentionnons quelques propriétés mathématiques agréables de la distribution de Pareto :

1. Des valeurs benchmark pour le paramètre α sont généralement acceptées par le marché de la réassurance. Par exemple :
 - (a) Incendie risques industriels : $\alpha \in [1, 1.5]$
 - (b) Incendie risques simples : $\alpha \in [1.5, 2.5]$
 - (c) Tremblement de terre : $\alpha \in [0.6, 1]$
 - (d) Tempêtes : $\alpha \in [1, 1.4]$
 - (e) RC Auto : $\alpha \in [1.5, 3]$
2. Supposons que l'on dispose d'un échantillon de m observations x_1, \dots, x_m . L'estimateur du maximum de vraisemblance de α est donné par la formule simple :

$$\hat{\alpha} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m \ln \frac{x_i}{A}}.$$

3. Un estimateur sans biais de α est donné par

$$\tilde{\alpha} = \frac{m - 1}{\sum_{i=1}^m \ln \frac{x_i}{A}}.$$

4. Discrétiser une variable aléatoire de Pareto au moyen de la méthode Local Moment Matching avec un moment (voir Gerber (1982) pour plus de détails) est aisé. La version discrète est donnée par :

$$f_{X_{\text{dis}}}(A) = 1 - \frac{(A+h)^{1-\alpha} - A^{1-\alpha}}{h(1-\alpha)A^{-\alpha}},$$

$$f_{X_{\text{dis}}}(A+jh) = \frac{2(A+jh)^{1-\alpha} - (A+(j-1)h)^{1-\alpha} - (A+(j+1)h)^{1-\alpha}}{h(1-\alpha)A^{-\alpha}},$$

$$j \geq 1.$$

5. A présent, nous allons analyser le pricing d'une tranche de réassurance en excédent de sinistre. Soit la tranche C *xs* D où C représente la couverture mise à disposition par le réassureur et D représente la franchise ou priorité. Définissons RL la longueur relative de la tranche :

$$RL = \frac{D+C}{D}.$$

Le coût moyen dans la tranche est aisément donné par

$$\mathbb{E}\min(C, \max(0, X-D)) = \frac{D^{1-\alpha}A^\alpha}{1-\alpha}(RL^{1-\alpha} - 1), \quad \alpha \neq 1,$$

$$= A \ln(RL), \quad \alpha = 1.$$

6. Supposons que la fréquence de sinistres au-delà du seuil A soit connue, disons λ_A . Alors, il est aisé de déterminer la fréquence de sinistres au-delà d'un seuil $B > A$:

$$\lambda_B = \lambda_A \left(\frac{A}{B}\right)^\alpha.$$

7. Soit $X \sim Pa(A, \alpha)$, alors $[X | X > B] \sim Pa(B, \alpha)$.
8. La prime pure d'une tranche en excédent de sinistre est donnée par :

$$PP = \lambda_A \frac{D^{1-\alpha}A^\alpha}{1-\alpha}(RL^{1-\alpha} - 1), \quad \alpha \neq 1,$$

$$= \lambda_A A \ln(RL), \quad \alpha = 1.$$

9. Lorsque le prix d'une tranche est connu, il est aisé d'en déduire le prix d'une autre tranche si le paramètre α est connu. Soient D_i , C_i , PP_i les caractéristiques de la tranche $i = 1, 2$. Alors :

$$PP_2 = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{1-\alpha} \frac{RL_2^{1-\alpha} - 1}{RL_1^{1-\alpha} - 1} PP_1, \quad \alpha \neq 1,$$

$$= \frac{\ln RL_2}{\ln RL_1} PP_1, \quad \alpha = 1.$$

10. Pour une distribution de Pareto, $Pa(A, \alpha)$, le paramètre A est un paramètre d'échelle. On a en effet que $vX \sim Pa(vA, \alpha)$.
11. La distribution de Pareto résulte du mélange d'une exponentielle par une gamma. Soit $f(x)$ la densité d'une exponentielle de paramètre θ :

$$f(x | \theta) = \theta e^{-\theta x}.$$

Soit $g(\theta)$ la densité d'une gamma de paramètres A et α :

$$g(\theta) = \frac{A^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-A\theta}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Soit alors $h(x)$ la densité du mélange de l'exponentielle par la gamma :

$$h(x) = \int_0^\infty \theta e^{-\theta x} g(\theta) d\theta$$

$$= \frac{\alpha A^\alpha}{(A+x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0.$$

On a ainsi défini une forme de la Pareto à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Soit X distribuée Pareto de fonction de répartition comme ci-dessus et de paramètres A et α . Posons $Y = X + A$:

$$\mathbb{P}[Y \leq x] = \mathbb{P}[X + A \leq x]$$

$$= \mathbb{P}[X \leq x - A]$$

$$= 1 - \frac{A^\alpha}{(A+x-A)^\alpha}$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{A} \right)^{-\alpha}.$$

12. Une Pareto résulte de l'exponentiation d'une exponentielle. En effet, soit Y une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle de paramètre 1. Alors $X = Ae^{Y/\alpha}$ est distribuée selon une Pareto de paramètres A et α :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X \leq x] &= \mathbb{P}[Ae^{Y/\alpha} \leq x] \\ &= \mathbb{P}[Y \leq \alpha \ln(x/A)] \\ &= 1 - e^{-\alpha \ln(x/A)} \\ &= 1 - \left(\frac{x}{A}\right)^{-\alpha}.\end{aligned}$$

13. Coter des traités pour lesquels la priorité change en fonction du nombre de grands sinistres est analytiquement possible avec une distribution de Pareto (voir Walhin (2003) pour plus de détails).
14. La distribution de Pareto est réputée avoir une queue épaisse à droite au sens suivant :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_Y(x)}{1 - F_X(x)} \rightarrow 0$$

pour des variables aléatoires Y distribuées par exemple comme une lognormale ou une gamma. La Pareto fournit donc une plus grande probabilité de survenance de grands sinistres. Ces derniers sont précisément ceux pour lesquels le réassureur en excédent de sinistre offre une couverture.

Dans le même ordre d'idée, on peut ajouter que la Pareto est un cas particulier de la distribution Pareto généralisée

$$G_{\xi, \sigma, \mu}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma}\right)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-(x - \mu)/\sigma} & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Le support de $G_{\xi, \sigma, \mu}(x)$ est $[0, \infty]$ si $\xi \geq 0$ et il vaut $[\mu, \mu - \frac{\sigma}{\xi}]$ si $\xi < 0$. La Pareto généralisée (lorsque $\mu = 0$) apparaît comme la distribution limite des excès au-delà de seuils u très élevés (voir par exemple Embrechts et al. (1997) pour plus de détails). Pour $\mu = u$, elle est donc un candidat naturel pour ajuster de grands sinistres.

La Pareto s'obtient comme cas particulier en prenant :

$$\xi = \frac{1}{\alpha},$$

$$\sigma = \frac{A}{\alpha},$$

$$\mu = A.$$

Le lecteur pourra se référer utilement à Schmutz and Doerr (1998) où de plus amples détails sont fournis quant aux propriétés directement liées au pricing de tranches de réassurance en excédent de sinistre.

3 Cadence de règlement des sinistres dans la tranche

Lorsque le réassureur doit déterminer un prix pour un traité en excédent de sinistre portant sur une branche à développement long comme la responsabilité civile automobile par exemple, il est intéressé à obtenir une estimation de la vitesse de paiement dans la tranche de réassurance. En effet, grâce à l'inversion du cycle économique en assurance, il peut placer la prime touchée à la conclusion du contrat en attendant les paiements futurs.

Supposons que pour les grands sinistres, c'est-à-dire ceux dépassant le seuil A , la vitesse de paiement des sinistres au premier franc ait pu être obtenue. Notons V_j la fraction de la charge ultime réglée en l'année de développement j . V_j représente bien ici une fraction cumulée de paiements. Nous supposons dans un premier temps que les V_j sont déterministes. Cette hypothèse sera relaxée à la section 5. Nous notons dans ce cas v_j la fraction cumulée de paiements au temps $t = j$.

La charge moyenne de paiement à charge du réassureur en excédent de sinistre offrant la couverture $CxsD$ a déjà été obtenue plus haut. Elle vaut :

$$\mathbb{E}[\text{Charge ultime totale}] = \lambda_A \frac{D^{1-\alpha} A^\alpha}{1-\alpha} (RL^{1-\alpha} - 1).$$

Les paiements effectués jusqu'à l'année de développement j sont simplement donnés par $v_j X$ au premier franc. Il nous suffit donc de changer A par $v_j A$ dans la formule ci-dessus pour obtenir les paiements cumulés en année de développement j . La fréquence λ_A n'est évidemment pas modifiée. Nous obtenons :

$$\mathbb{E}[\text{Paiements totaux en } j] = \lambda_A \frac{D^{1-\alpha} (v_j A)^\alpha}{1-\alpha} (RL^{1-\alpha} - 1).$$

La cadence de règlement dans la tranche de réassurance en fonction du temps j , v_j^{Re} s'écrit donc

$$v_j^{Re} = \frac{\mathbb{E}[\text{Paiements totaux en } j]}{\mathbb{E}[\text{Charge ultime totale}]} = v_j^\alpha.$$

Ce résultat est d'une simplicité remarquable et nous notons immédiatement que la vitesse de paiement est indépendante de la franchise du traité ainsi que de la capacité du traité.

Nous pouvons raffiner le résultat dans deux directions :

1. S'il y a une cadence de déclaration des sinistres plus grands que A , disons $\lambda_A(1), \dots, \lambda_A(j), \dots, \lambda_A(n)$, alors, le résultat s'étend immédiatement comme suit :

$$v_j^{Re} = \frac{\lambda_A(j)}{\lambda_A(n)} v_j^\alpha.$$

2. Si une clause de stabilité joue à la fois sur la franchise et la limite du traité, en faisant évoluer celles-ci en fonction de l'inflation observée, alors la cadence de règlement des sinistres est adaptée comme suit, sous l'hypothèse que la clause de stabilité s'applique en moyenne. Définissons w_j le facteur d'aggravation de la priorité et de la limite en l'année de développement j . Nous avons dans ce cas :

$$v_j^{Re} = \left(\frac{w_j}{w_n} \right)^{1-\alpha} v_j^\alpha.$$

Notons que s'il n'y a pas de cadence de déclaration des sinistres, la vitesse de paiement du réassureur est définie de manière équivalente comme

$$v_j^{Re} = v_j \frac{\mathbb{E} \min\left(\frac{C}{v_j}, \max(0, X - \frac{D}{v_j})\right)}{\mathbb{E} \min(C, \max(0, X - D))}.$$

4 Caractérisation

Dans cette section, nous laissons tomber l'indice j afin d'alléger les notations. Montrons à présent que, sous l'hypothèse que les fonctions de distributions sont dérivables sur un support non borné à droite, la vitesse de paiement pour le réassureur est indépendante de la priorité et de la couverture uniquement avec une distribution de Pareto.

Analysons d'abord le cas d'une distribution sur un support borné $[A, B]$. Il est évident que la vitesse de paiement du réassureur dépendra de D et C puisque le rapport $\frac{D+C}{v}$ peut être plus grand ou plus petit que B . Donc nécessairement, nous avons $B \rightarrow \infty$.

En supposant D et C positifs, il faut que $A = 0$ pour qu'un problème similaire ne se pose pas à gauche. Il est toutefois logique de supposer que $D \geq A$. Donc si $v \leq 1$, nous pouvons travailler avec un $A \geq 0$ quelconque. Si v peut prendre des valeurs plus grandes que 1, alors il suffit de choisir D et A pour que $\frac{D}{v}$ soit toujours dans le support de la variable aléatoire X .

Nous travaillons donc désormais sur des distributions dérivables sur le support $[A, \infty]$.

Il nous faut démontrer que le rapport suivant est indépendant de D et de C :

$$\frac{\mathbb{E} \min\left(\frac{C}{v}, \max(0, X - \frac{D}{v})\right)}{\mathbb{E} \min(C, \max(0, X - D))}.$$

Soit $F(x)$ la fonction de distribution de X . Définissons la fonction de survie de X : $G(x) = 1 - F(x)$. Nous pouvons immédiatement voir que le rapport d'espérances se réécrit, en fonction de la fonction de survie comme

$$\frac{\frac{D+C}{v} \int_{\frac{D}{v}}^{\frac{D+C}{v}} G(x) dx}{\int_D^{D+C} G(x) dx}.$$

Pour que cette expression ne dépende pas de D et C , il suffit que ses dérivées partielles du premier ordre par rapport à D et C soient nulles. Définissons $H(x)$ comme étant la primitive de $G(x)$:

$$H(x) = \int_0^x G(s) ds.$$

En utilisant la règle de dérivation de Leibnitz sous le signe intégral, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial D} \frac{\int_{\frac{D}{v}}^{\frac{D+C}{v}} G(x) dx}{\int_D^{D+C} G(x) dx} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial C} \frac{\int_{\frac{D}{v}}^{\frac{D+C}{v}} G(x) dx}{\int_D^{D+C} G(x) dx} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\left[G\left(\frac{D+C}{v}\right) \frac{1}{v} - G\left(\frac{D}{v}\right) \frac{1}{v} \right] [H(D+C) - H(D)] - [G(D+C) - G(D)] \left[H\left(\frac{D+C}{v}\right) - H\left(\frac{D}{v}\right) \right] = 0$$

$$\left[G\left(\frac{D+C}{v}\right) \frac{1}{v} \right] [H(D+C) - H(D)] - [G(D+C)] \left[H\left(\frac{D+C}{v}\right) - H\left(\frac{D}{v}\right) \right] = 0$$

Nous pouvons réécrire ces deux conditions de premier ordre comme suit :

$$\frac{1}{v} \frac{G\left(\frac{D+C}{v}\right) - G\left(\frac{D}{v}\right)}{G(D+C) - G(D)} = \frac{1}{v} \frac{G\left(\frac{D+C}{v}\right)}{G(D+C)}, \quad (1)$$

$$\frac{H\left(\frac{D+C}{v}\right) - H\left(\frac{D}{v}\right)}{H(D+C) - H(D)} = \frac{1}{v} \frac{G\left(\frac{D+C}{v}\right)}{G(D+C)}. \quad (2)$$

Nous allons dans un premier temps résoudre la première équation fonctionnelle, et dans un second temps, nous retiendrons les fonctions de survie qui satisfont à la seconde équation fonctionnelle.

Soit donc à résoudre

$$\frac{1}{v} \frac{G\left(\frac{D+C}{v}\right) - G\left(\frac{D}{v}\right)}{G(D+C) - G(D)} = \frac{1}{v} \frac{G\left(\frac{D+C}{v}\right)}{G(D+C)}.$$

Afin de simplifier les notations, posons $x = D$ et $y = D + C$. Il est équivalent de résoudre

$$G(x)G\left(\frac{y}{v}\right) = G(y)G\left(\frac{x}{v}\right).$$

Posons $h(x) = \ln G(x)$. Nous obtenons donc l'équation fonctionnelle en h :

$$h(x) + h\left(\frac{y}{v}\right) = h(y) + h\left(\frac{x}{v}\right). \quad (3)$$

Nous constatons immédiatement que la fonction h est nécessairement toujours croissante ou toujours décroissante. En fait, comme G est une fonction de survie et que le logarithme népérien est une fonction croissante, nous pouvons immédiatement en déduire que h est une fonction décroissante. Nous imposons donc $h'(x) < 0 \forall x$.

Dérivons par rapport à x :

$$h'(x) = \frac{1}{v} h'\left(\frac{x}{v}\right). \quad (4)$$

Si h est une solution de (3) alors, h est nécessairement une solution de (4). Par contre, il est possible que des solutions de (4) ne soient pas solutions de (3). Il conviendra donc de ne retenir que les solutions de (4) qui sont également solutions de (3).

Posons à présent $g(x) = h'(x)$. Nous obtenons

$$g\left(\frac{x}{v}\right) = v g(x),$$

Posons à présent, $x = \exp(y)$, $g(x) = \exp(f(y))$ et $p = \ln v$, notre équation fonctionnelle devient

$$f(y - p) = p + f(y)$$

en prenant le logarithme à droite et à gauche. Additionnant $y - p$ à droite et à gauche, nous faisons apparaître

$$f(y - p) + y - p = f(y) + y$$

et nous obtenons donc que $y + f(y)$ est une fonction périodique de période p . Nous pouvons donc écrire

$$y + f(y) = P(y)$$

où $P(y)$ est périodique de période p .

Comme $P(y)$ est périodique pour tous p , il s'ensuit que $y + f(y) = \text{constante}$. Repassant dans l'espace des x , nous obtenons

$$xg(x) = b.$$

On en déduit

$$h'(x) = \frac{b}{x}.$$

Nous avons constaté plus haut que la dérivée de h doit être toujours négative. Nous en concluons que $b < 0$.

Il suit

$$h(x) = a + b \ln(x).$$

Nous vérifions immédiatement que h est une solution de (3).

Comme $h(x) = \ln G(x)$, nous obtenons

$$G(x) = dx^b,$$

où d et b sont deux constantes arbitraires.

Nous reconnaissons que la seule solution à notre première équation fonctionnelle est la distribution de Pareto, que nous pouvons reparamétriser comme suit :

$$G(x) = \left(\frac{x}{A}\right)^{-\alpha}, \quad x \geq A.$$

Vérifions à présent que la seconde équation fonctionnelle (2)

$$\frac{1}{v} \frac{G\left(\frac{D+C}{v}\right)}{G(D+C)} = \frac{H\left(\frac{D+C}{v}\right) - H\left(\frac{D}{v}\right)}{H(D+C) - H(D)} \quad (5)$$

est bien vérifiée pour cet unique candidat. Nous avons

$$H(x) = \int_0^x G(s) ds = \frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)A^{-\alpha}},$$

et les deux membres de (5) sont égaux à $v^{\alpha-1}$.

Nous avons donc démontré que la vitesse de paiement dans une tranche de réassurance est indépendante de la priorité et de la limite si et seulement si la distribution des montants de sinistres est Pareto.

5 Modèle stochastique pour la vitesse de paiement au premier franc

Dans la section qui précède, nous avons supposé une vitesse de paiement au premier franc déterministe. Or il est clair que tous les sinistres ne sont pas réglés avec la même célérité. Certains sont payés plus vite, d'autres plus lentement. Il semble donc adéquat de vouloir analyser cet effet stochastique sur la vitesse de paiement dans les tranches de réassurance.

Supposons à présent que les V_j sont des variables aléatoires.

Dans le cas de la distribution de Pareto, une application de l'inégalité de Jensen nous permet immédiatement de conclure que

$$\mathbb{E}V_j^{Re} \geq (\mathbb{E}V_j)^\alpha, \quad \alpha > 1,$$

$$\mathbb{E}V_j^{Re} \leq (\mathbb{E}V_j)^\alpha, \quad \alpha < 1.$$

Nous constatons donc que la vitesse de paiement dans la tranche est plus rapide, lorsque le paramètre α est supérieur à 1, que celle calculée sur base d'un modèle déterministe et inversement lorsque $\alpha < 1$. Le cas limite $\alpha = 1$ sépare ces deux situations et pour celui-ci il n'y a pas de différence. Rappelons que le cas $\alpha = 1$ est également un cas limite en ce sens qu'il sépare la situation où le premier moment existe de celle où il n'existe pas.

En responsabilité civile automobile, typiquement le α sera supérieur à 1. Cette situation doit interpeller l'actuaire, qui, dans ce cas, obtient des estimations non conservatives s'il travaille à l'intérieur d'un modèle déterministe pour la vitesse de paiement. Ceci justifie donc une étude plus approfondie de la vitesse moyenne de paiement dans une tranche de réassurance lorsque la vitesse de paiement au premier franc est stochastique.

Une distribution naturelle pour analyser la vitesse de paiement au premier franc est la distribution Beta, qui prend ses valeurs entre 0 et 1. Soit B une variable aléatoire. Nous dirons qu'elle est distribuée suivant une distribution de Beta de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ si sa fonction de densité s'écrit :

$$\begin{aligned} f_B(x) &= 0, & x < 0, \\ &= \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}, & 0 < x \leq 1, \\ &= 0, & x > 1, \end{aligned}$$

où $B(a, b)$ est la fonction Beta :

$$B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

et $\Gamma(k)$ est la fonction Gamma :

$$\int_0^{\infty} s^{k-1} e^{-s} ds.$$

Si nous intégrons la vitesse de paiement du réassureur par rapport à une Beta(a_j, b_j), nous obtenons sans difficulté le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}V_j^{Re} &= \int_0^1 v_j^\alpha \frac{v_j^{a_j-1} (1-v_j)^{b_j-1}}{B(a_j, b_j)} dv_j \\ &= \frac{\Gamma(a_j + \alpha)\Gamma(a_j + b_j)}{\Gamma(a_j)\Gamma(a_j + b_j + \alpha)}, \quad \alpha > -a_j. \end{aligned}$$

L'espérance et la variance de la vitesse de paiement au premier franc s'obtiennent aisément à partir de la formule ci-dessus :

$$\begin{aligned} \mu_j = \mathbb{E}V_j &= \frac{a_j}{a_j + b_j}, \\ \sigma_j^2 = \mathbb{V}arV_j &= \frac{a_j b_j}{(a_j + b_j + 1)(a_j + b_j)^2}. \end{aligned}$$

Dans certaines branches d'assurance, comme en assurance-crédit, il peut y avoir de nombreux recours. Il est dès lors envisageable de rencontrer des situations pour lesquelles les paiements cumulés à un moment j , $V_j X_i$, sont supérieurs aux paiements ultimes X_i . Donc, il se peut que V_j prenne des valeurs supérieures à 1. Il est possible de tenir compte de cette situation en étendant le modèle Beta comme suit :

$$\begin{aligned} f_B(x) &= 0, & x < 0, \\ &= \frac{x^{a-1} (m-x)^{b-1}}{B(a, b) m^{a+b-1}}, & 0 < x \leq m, \\ &= 0, & x > m. \end{aligned}$$

L'espérance de la vitesse de paiement du réassureur s'écrit dans ce cas

$$\begin{aligned} \mathbb{E}V_j^{Re} &= \int_0^m v_j^\alpha \frac{v_j^{a_j-1} (m - v_j)^{b_j-1}}{B(a_j, b_j) m^{a_j+b_j-1}} dv_j \\ &= \frac{m^\alpha \Gamma(a_j + \alpha) \Gamma(a_j + b_j)}{\Gamma(a_j) \Gamma(a_j + b_j + \alpha)}, \quad \alpha > -a_j. \end{aligned}$$

6 Application numérique

L'application numérique est basée sur un jeu de données réelles. Le tableau suivant donne les moyennes et variances empiriques de la vitesse de paiement en fonction de l'année de développement pour un portefeuille responsabilité civile automobile :

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
μ_j	4%	13%	18%	23%	35%	47%	66%	70%	71%	94%	100%
σ_j	9%	15%	15%	18%	32%	35%	37%	41%	41%	9%	0%

Tab. 1 – *Caractéristiques empiriques de la cadence de paiement au premier franc*

Un ajustement par la méthode des moments nous fournit les estimateurs suivants pour les paramètres a_j et b_j :

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_j	0.14	0.53	1.07	0.96	0.45	0.47	0.42	0.18	0.17	6.05	N/A
b_j	3.24	3.62	4.71	3.27	0.82	0.54	0.22	0.08	0.07	0.41	N/A

Tab. 2 – *Paramètres de la beta*

Nous pouvons à présent comparer les vitesses de paiement dans la tranche pour différentes valeurs de α :

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Stochastique	1.9%	6.5%	9.8%	13.3%	27.4%	38.9%	61.0%	67.0%	68.0%	91.0%	100.0%
Déterministe	0.8%	4.5%	7.9%	10.8%	21.0%	31.7%	53.9%	58.0%	59.2%	90.7%	100.0%

Tab. 3 – $\alpha = 1.5$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Stochastique	0.4%	1.5%	2.2%	4.0%	16.9%	27.9%	52.8%	63.0%	64.3%	84.4%	100.0%
Déterministe	0.0%	0.2%	0.6%	1.2%	4.4%	10.1%	29.0%	33.7%	35.0%	82.3%	100.0%

Tab. 4 – $\alpha = 3$

Il n'est évidemment pas aisé de se rendre compte de l'effet de ces différences sur le prix que le réassureur peut remettre à son client. Afin de ne pas alourdir la présentation de l'article, nous allons calculer des primes technico-financières comme étant simplement les paiements moyens actualisés à un taux technique donné. Nous obtenons les résultats suivants, sous forme de pourcentage à appliquer à la prime pure. Ce pourcentage représente donc l'effet financier favorable dû à l'inversion du cycle économique, pour le cas où il serait acceptable d'escompter les paiements futurs. Nous notons i le taux d'actualisation utilisé.

i	2%	4%	6%
Déterministe	86.12%	74.57%	64.91%
Stochastique	86.92%	75.95%	66.72%

Tab. 5 – Actualisation avec $\alpha = 1.5$

i	2%	4%	6%
Déterministe	83.67%	70.35%	59.42%
Stochastique	85.73%	73.86%	63.94%

Tab. 6 – Actualisation avec $\alpha = 3$

7 Conclusion

Nous avons exposé dans cet article une nouvelle propriété de la distribution de Pareto : la vitesse de paiement dans n'importe quelle tranche de réassurance en excédent de sinistre est indépendante de la tranche si et seulement si la sinistralité se comporte comme une distribution de Pareto. Dans ce cas la vitesse de paiement du réassureur est donnée par V_j^α lorsque V_j est la vitesse de paiement au premier franc. La simplicité de cette expression nous a permis d'analyser l'effet de considérer, erronément, une cadence de paiements déterministe, alors qu'elle est en réalité stochastique.

En pratique, cet effet, classiquement ignoré par les réassureurs, est loin d'être négligeable.

Notons que nos calculs ne sont applicables qu'à des traités ne présentant pas de clauses du type d'une franchise annuelle. En effet, dans ce cas, il faut appliquer l'algorithme de Panjer pour obtenir les paiements moyens à charge du réassureur et il n'y a donc plus de formule analytique. Une solution pourrait être de recourir à la simulation mais cette optique est très lourde en temps calcul et requiert une modélisation multivariée de la cadence de règlement des sinistres. Un calcul sans clause de franchise annuelle permettra de se faire une idée de l'erreur commise avec la vitesse de paiement déterministe par rapport à la vitesse de paiement stochastique.

Notons enfin que l'idée répandue auprès des réassureurs selon laquelle la vitesse de paiement décroît en fonction de la hauteur de la priorité (avec une limite infinie, pour simplifier) – si elle est vérifiée empiriquement – est une indication que la distribution de Pareto n'ajuste pas bien les montants de sinistre.

Remerciements

Je remercie Marc Henry, Yves Samain et Robert Verlaak pour les discussions intéressantes que nous avons eues sur le sujet, qui ont mené à une meilleure présentation de l'article.

Je remercie également l'arbitre pour ses remarques et en particulier pour avoir corrigé une erreur dans la démonstration du théorème de caractérisation.

Bibliographie

1. Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997), *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer.
2. Gerber, H.U. (1982), On the Numerical Evaluation of the Distribution of Aggregate Claims and its Stop-Loss Premiums, *Insurance : Mathematics and Economics*, 1, 13–18.
3. Schmutz, M. and Doerr, R.R. (1998), *The Pareto Model in Property Reinsurance*, SwissRe Publications.
4. Walhin, J.F. (2003). On the Practical Pricing of Reinsurance Treaties Based on Order Statistics, à paraître dans *Bulletin Français d'Actuariat*.

Jean-François Walhin
Secura Belgian Re
Avenue des Nerviens, 9–31
B-1040 Bruxelles
Belgique
e-mail : jfw@secura-re.com

Résumé

Nous montrons que la cadence des paiements à charge du réassureur en excédent de sinistre ne dépend pas de la tranche réassurée lorsque les montants de sinistre sont modélisés par une distribution de Pareto. Nous montrons également que cette propriété caractérise la distribution de Pareto. La simplicité de l'expression de la cadence de paiement dans la tranche de réassurance en excédent de sinistre nous permet d'analyser l'effet d'une vitesse de paiement au premier franc stochastique par rapport à l'hypothèse souvent retenue d'une vitesse de paiement au premier franc déterministe.

Summary

We show that the speed of payment of the excess of loss reinsurer's liability does not depend on the reinsured layer when the claim amounts are Pareto distributed. We also show that this property is a characterization of the Pareto distribution. The easy analytical form of the speed of payment of the excess of loss reinsurer allows to analyse the effect of working with a stochastic from ground up speed of payment against the wrong hypothesis of a deterministic from ground up speed of payment.

Zusammenfassung

Wir zeigen, dass die Zahlungsgeschwindigkeit für einen Schadenexzedenten-Rückversicherer nicht vom rückversicherten Layer abhängt, falls die Schadenhöhen Pareto-verteilt sind. Wir zeigen auch, dass diese Eigenschaft eine Charakterisierung der Pareto-Verteilung ist. Die Einfachheit des Ausdruckes für die Geschwindigkeit der Zahlungen im rückversicherten Layer erlaubt es uns, die Auswirkungen einer stochastischen Geschwindigkeit der Zahlungen (vom ersten Franken weg) gegenüber der zwar falschen, jedoch oft unterstellten Hypothese einer deterministischen Zahlungsgeschwindigkeit zu studieren.

A note on the expected present value of dividends with a constant barrier in the discrete time model

1 Introduction

The aim of the present study is to formalize the dividend payment policies in the discrete case for a non-life insurance portfolio, and to obtain the expected present value of the dividend payments.

The classical model analyses the solvency of non-life insurance portfolios using the probability of ruin as the criterion. The discrete case has been studied by various authors, for example, Bowers et al. (1987), Gerber (1988), Michel (1989), Shiu (1989), Willmot (1993), Willmot and Cai (2001), De Vylder (1996) or Li and Garrido (2002). Section 2 deals with the alternative approach to be found in the literature proposing the pay-out of part of the reserves in the form of dividends (Bühlmann (1970), Gerber (1972, 1981), Paulsen and Gjessing (1997), Siegl and Tichy (1996, 1999)).

Section 3 deals with the analysis of the dividend payments when the model is modified to have a constant dividend barrier $b(t) = b$, assuming discrete payments, and presents a method for solving such problems. We prove that, as in the continuous case, the probability of ruin is unity. Bühlmann (1970) and Gerber (1972) obtain the expectation of the present value assuming two different particular cases for the distribution of aggregated cost in one period. We present a solution for the general case, i.e. for any discrete aggregated cost distribution. The system of linear equations that allows one to find the expectation of the present value of the dividend payments is obtained, and it is solved using the matrix form of the system. We also include, in Section 4, a recursive solution, alternative to Gerber (1972).

2 Dividend policy in the discrete case

Following Bühlmann (1970) we take a discrete dividend policy to be that which makes the payouts at given times, t_i for $i = 1, 2, 3, \dots$, as long as the level of reserves at time t_i surpasses the cap represented by the dividend barrier. Consider the equidistant times t_i for $i = 1, 2, 3, \dots$ with $t_0 = 0$, the time unit being one year.

The level of reserves at t_i before dividend payments, R_i^* , can be defined as $R_i^* = u + c \cdot t_i - SS_i - SD_{i-1}$, where SS_i is the aggregate of claims in the period $[0, t_i]$, u is the initial reserve at t_0 , c is the annual premium income, $SD_i = D_1 + D_2 + \dots + D_s$, $\forall s \leq i$ is the sum of the dividend payments in an interval $[0, t_i]$, where $SD_0 = 0$, and $D_i = \text{Max}\{(R_i^* - b), 0\}$ the dividends paid out at t_i for $i = 1, 2, 3, \dots$.

Let v be a constant annual discount rate for all the periods and t_k the discrete time of ruin. Then the expected present value of the dividend payments, assuming that there are dividend payments only up to the time of ruin is

$$W(u, b) = E \left[\sum_{i=1}^k D_i \cdot v^{t_i} \right] \quad \text{with } t_k = \text{Min}\{t_i \mid R_i^* < 0\}.$$

3 Constant barrier: calculation of $W(u, b)$

We shall now generalize the calculation of the expected present value of the dividends, following the approach of Bühlmann (1970) and Gerber (1972), for the calculation of $W(u, b)$ in a modified model with a constant dividend barrier, b .

We consider $S_i = SS_i - SS_{i-1}$. We assume that S_i are i.i.d. random variables with common probability function $P_s = P[S = s]$ and distribution function $F_S(s) = P[S \leq s]$ for $s = 0, 1, 2, \dots$. For simplicity, we redefine c as $c \cdot t_1$ so, for a positive security loading, $E[S] < c$.

The solution of the problem involves considering the random variable of the total accumulated claims in a period as a discrete random variable, and the hypothesis that all monetary values (u, b, c, \dots) are multiples of some given unit. Neither of these conditions implies any major restriction on the validity of the model: in the case of the monetary values, we simply have to change the reference unit, and in the case of the claims, we shall just have to previously discretize the random variable if it is not already discrete.

In the constant dividend barrier case the probability of ruin is 1 in the continuous case (Bühlmann (1970)). We prove that this is also true in the discrete case. In the discrete case ruin probability is $\psi(u, b) = P[t_k < \infty]$.

Theorem 1 *Ruin probability in a model with a constant dividend barrier assuming discrete payments is one, $\psi(u, b) = 1$*

Proof. $\psi(u, b)$ for $u = b$, considering the situation at time t_1 , is

$$\psi(b, b) \cdot (1 - F_S(c)) = \sum_{s=c+1}^{b+c} \psi(b + c - s, b) \cdot P_s + 1 - F_S(b + c) \quad (1)$$

We know, for $h \geq 0$, that $\psi(b - h, b) \geq \psi(b, b)$, and rearranging terms, (1) can be written as

$$\psi(b, b) \cdot (1 - F_S(b + c)) \geq 1 - F_S(b + c) \quad (2)$$

and in view of (2), $\psi(b, b) \geq 1$, then

$$\psi(b - h, b) \geq \psi(b, b) \geq 1$$

which implies $\psi(u, b) = \psi(b, b) = 1$. ■

Bühlmann (1970) proposed a system of finite difference equations to calculate $W(u, b)$, considering the situation at time t_1 , and solving it for the particular case in which the variation in the reserves is dichotomous, taking only the values -1 and 1 . Since the only random factor considered in the model is the occurrence of claims, the case that Bühlmann calculated implies that the claims in a given period can only take the values $(c + 1)$ and $(c - 1)$. Gerber (1972) considers the system where the variation in the reserves can take the values $1, 0, -1, -2, \dots$ and the claims in a given period are multiples of the premium.

To generalize the calculation of $W(u, b)$, we shall analyse the situation of the process at time t_1 , so,

$$W(u, b) = v \cdot E[W(R_1^* - D_1, b) + D_1] \quad (3)$$

The dividend payments in t_1 will depend on whether $R_1^* = u + c - s$ is greater or lesser than the level of the barrier b :

- **Case 1:** R_1^* is greater than the level of the barrier b . In this case, the dividend payments in t_1 , $D_1 = SD_1$, are positive, with their amount being the difference between R_1^* and the barrier b , i.e. $D_1 = u + c - s - b$. Also, to obtain $W(u, b)$ the calculated future dividends must be discounted to t_1 , which are given by $W(b, b)$.
- **Case 2:** R_1^* is less than or equal to the level of the barrier b , independently of what happened in the interval $(0, t_1]$. In this case, for the calculation of $W(u, b)$, we must discount $W(u + c - s, b)$.

To determine the expression for the expected present value of the dividend payments, we shall formalize the two cases described previously, by setting up a system of linear equations.

According to the initial level of reserves u , such that $u \leq b$, one can define $b + 1$ equations for the calculation of $W(u, b)$ with $u = 0, \dots, b$.

Theorem 2 For $x = 0, 1, \dots, c, c + 1, \dots, b$

$$W(b - x, b) = v \cdot \left[W(b, b) \cdot F_S(c - x) + \sum_{s=0}^{c-(x+1)} (c - s - x) \cdot P_s + \sum_{s=1}^b W(b - s, b) \cdot P_{s+c-x} \right] \quad (4)$$

Proof. $W(u, b)$ is calculated, using the law of total probability, as the discounted sum of D_1 and the expected present value of the future dividends in t_1 :

- **If the initial level of reserves coincides with the barrier level, $u = b$**
 First, let us consider the case in which the total of claims s coincides with the premium income c . At t_1 therefore, the level of reserves is $R_1^* = b + c - s = b$, then $D_1 = 0$.
 In those cases when the amount of claims s lies in the interval $[0, c - 1]$, there will be dividend payments, since $R_1^* = b + c - s$ is greater than b , with $D_1 = c - s$, so that the level of reserves after dividend payment will be $u = b$.
 Finally, let us consider the cases in which the aggregate claims amount s lies in the interval $[c + 1, b + c]$. The level of reserves at t_1 , $R_1^* = b + c - s$, is less than b , then $D_1 = 0$.
 Obviously R_1^* and D_1 depend on s , so we can write

s	R_1^*	D_1	$R_1^* - D_1$
$[0, c - 1]$	$b + c - s$	$c - s$	b
c	b	0	b
$[c + 1, b + c]$	$b + c - s$	0	$b + c - s$

Then, from (3)

$$W(b, b) = v \cdot \left[W(b, b) \cdot F_S(c) + \sum_{s=0}^{c-1} (c - s) \cdot P_s + \sum_{s=1}^b W(b - s, b) \cdot P_{s+c} \right] \quad (5)$$

- **If the initial level of reserves is below the barrier by less than c units, $b - c < u < b$.**

The equation for $u = b - x$, when $x = 1, \dots, c - 1$ results from taking into account that the level of reserves at t_1 is

$$R_1^* = b - x + c - s \quad (6)$$

If $s < c - x$ then (6) is greater than b , and therefore leads to dividend payment, where $D_1 = c - s - x$ would have to be paid out, leaving the new level of reserves at b .

If $s > c - x$ then (6) is less than b . In this case, there will be no dividend payment, $D_1 = 0$. Also, so as not to cause ruin, one must have that $b - x + c - s \geq 0 \Rightarrow s \leq b - x + c$. Hence, the amount of s has to lie in the interval $[c - x + 1, c - x + b]$.

Lastly, if $s = c - x$, $R_1^* = b - x + c - s = b$ and $D_1 = 0$.

Then

s	R_1^*	D_1	$R_1^* - D_1$
$[0, c - x - 1]$	$b - x + c - s$	$c - s - x$	b
$c - x$	b	0	b
$[c - x + 1, c - x + b]$	$b - x + c - s$	0	$b - x + c - s$

So, from (3)

$$W(b - x, b) = v \cdot \left[W(b, b) \cdot F_S(c - x) + \sum_{s=0}^{c-(x+1)} (c - s - x) \cdot P_s + \sum_{s=1}^b W(b - s, b) \cdot P_{s+c-x} \right] \quad (7)$$

- **If the initial level of reserves is below the barrier by at least c units, $0 \leq u \leq b - c < b$.**

Now, for $u = b - x$, when $x = c, c + 1, \dots, b$, the level of reserves is $R_1^* = b - x + c - s$, which is therefore always less than b given the values of x . There is therefore no dividend payment.

So, from (3)

$$W(b - x, b) = v \cdot \sum_{s=0}^{b+(c-x)} W(b - x + c - s, b) \cdot P_s \quad (8)$$

where the upper-limit of the sum prevents the case in which the level of reserves is negative, $b - x + c - s \geq 0 \Rightarrow s \leq b + (c - x)$.

We can observe that the expressions (5), (7) and (8) are included in the general expression (4). ■

The matrix form of the system defined in expression (4) is obtained in Appendix A.

4 Analysis of the $c = 1$ case

If we assume that the distribution of the total cost in a period is concentrated in multiples of the premium, so $c = 1$, it is possible to calculate $W(u, b)$ as a recursive process. We present an alternative solution to that of Gerber (1972). As $E[S] < c = 1$, then $P_0 > 0$.

Theorem 3 For $x = 0, 1, \dots, b - 1$

$$W(b - x, b) = \frac{1}{C_1(x)} \cdot \left(C_3(x) + \sum_{s=x+1}^b W(b - s, b) \cdot C_2(s, x) \right) \quad (9)$$

where $C_1(x)$, $C_2(s, x)$ and $C_3(x)$ are calculated in a recursive form,

$$C_1(x + 1) = C_1(x) \cdot (1 - v \cdot P_1) - v \cdot P_0 \cdot C_2(x + 1, x)$$

$$C_2(s, x + 1) = C_2(s, x) \cdot v \cdot P_0 + C_1(x) \cdot v \cdot P_{s-x}, \quad s = x + 2, \dots, b$$

$$C_3(x + 1) = v \cdot P_0 \cdot C_3(x) = v^{x+2} \cdot P_0^{x+2}$$

where $C_1(0) = 1 - v \cdot P_1 - v \cdot P_0$, $C_2(s, 0) = v \cdot P_{s+1}$ for $s = 1, \dots, b$, $C_3(0) = v \cdot P_0$ and $W(0, b) = \frac{C_3(b)}{C_1(b)}$.

The proof of Theorem 3 is in Appendix B.

Appendix A

It can be readily verified that the generalization of the system presented in Theorem 2, and defined by equations (5), (7) and (8), can be written in matrix form $v \cdot A \cdot \bar{w} + v \cdot D = \bar{w}$, where A is the matrix of coefficients made up of

different submatrices $A = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$, with M_1 a vector of $(c + 1)$ components ($E[S] < c$, then $F_S(c - 1) > 0$), M_2 a matrix of order $(c + 1) \times b$, M_3 a null vector of $(b - c)$ components and M_4 a matrix of order $(b - c) \times b$. The matrix A is therefore a square matrix of order $(b + 1)$,

$$A = \begin{pmatrix} F_s(c) & P_{c+1} & P_{c+2} & P_{c+3} & \dots & \dots & P_{c+b} \\ F_s(c-1) & P_c & P_{c+1} & P_{c+2} & \dots & \dots & P_{c+b-1} \\ F_s(c-2) & P_{c-1} & P_c & P_{c+1} & \dots & \dots & P_{c+b-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ F_s(0) & P_1 & P_2 & P_3 & \dots & \dots & P_b \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & \dots & \dots & P_{b-1} \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & \dots & \dots & P_{c+b-1} \\ 0 & 0 & 0 & P_0 & \dots & \dots & P_{c+b-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & P_{c+b-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & P_0 & \dots & P_c \end{pmatrix}$$

The vector of independent terms D is of order $(b + 1) \times 1$, formed by c first elements different from zero, and the remaining $b + 1 - c$ elements equal to zero. \bar{w} is the vector of $b + 1$ unknowns,

$$D = \begin{pmatrix} \sum_{s=0}^{c-1} (c-s) \cdot P_s \\ \sum_{s=0}^{c-2} (c-s-1) \cdot P_s \\ \sum_{s=0}^{c-3} (c-s-2) \cdot P_s \\ \vdots \\ P_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} W(b, b) \\ W(b-1, b) \\ W(b-2, b) \\ \vdots \\ W(b-c, b) \\ W(b-c-1, b) \\ \vdots \\ W(0, b) \end{pmatrix}$$

The solution of system is $\bar{w} = [I - v \cdot A]^{-1} \cdot v \cdot D$. As the spectral norm of the matrix $v \cdot A$ is less than one, $[I - v \cdot A]$ is regular.

Appendix B

Proof. From (4) when $c = 1$ and $x = 0$, we obtain

$$W(b, b) = \frac{1}{1 - v \cdot P_1 - v \cdot P_0} \cdot \left(v \cdot P_0 + v \cdot \sum_{s=1}^b W(b - s, b) \cdot P_{s+1} \right) \quad (\text{B1})$$

and for $x = 1$

$$W(b - 1, b) = \frac{v}{1 - v \cdot P_1} \cdot \left[W(b, b) \cdot P_0 + \sum_{s=2}^b W(b - s, b) \cdot P_s \right] \quad (\text{B2})$$

If we substitute (B1) in (B2), simplifying terms gives

$$\begin{aligned} & W(b - 1, b) \\ &= \frac{v^2 \cdot P_0^2 + \sum_{s=2}^b W(b - s, b) \cdot (v^2 \cdot P_0 \cdot P_{s+1} + v \cdot P_s \cdot (1 - v \cdot P_1 - v \cdot P_0))}{(1 - v \cdot P_1) \cdot (1 - v \cdot P_1 - v \cdot P_0) - v^2 \cdot P_0 \cdot P_2} \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Putting $C_1(1) = (1 - v \cdot P_1) \cdot (1 - v \cdot P_1 - v \cdot P_0) - v^2 \cdot P_0 \cdot P_2$,
 $C_2(s, 1) = v^2 \cdot P_0 \cdot P_{s+1} + v \cdot P_s \cdot (1 - v \cdot P_1 - v \cdot P_0) \forall s > 1$ and $C_3(1) = v^2 \cdot P_0^2$,

(B3) can be re-written as $W(b - 1, b) = \frac{1}{C_1(1)} \cdot \left(C_3(1) + \sum_{s=2}^b W(b - s, b) \cdot \right.$

$\left. (C_2(s, 1)) \right)$, and generalized to (9).

Now we show (9) by induction. We assume (9) is true for x , and we show that it is true for $x + 1$. From (4) when $c = 1$ and $u = b - x - 1$, ($0 < x \leq b$)

$$\begin{aligned} & (1 - v \cdot P_1) \cdot W(b - x - 1, b) \\ &= v \cdot \left[W(b - x, b) \cdot P_0 + \sum_{s=1}^{b-x-1} W(b - x - 1 - s, b) \cdot P_{s+1} \right] \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

We substitute (9) in (B4),

$$\begin{aligned} & W(b - x - 1, b) \\ &= \frac{v \cdot P_0 \cdot C_3(x) + \sum_{s=x+2}^b W(b - s, b) \cdot (v \cdot P_0 \cdot C_2(s, x) + C_1(x) \cdot v \cdot P_{s-x})}{C_1(x) \cdot (1 - v \cdot P_1) - v \cdot P_0 \cdot C_2(x + 1, x)} \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

which implies

$$\begin{aligned} & W(b - (x + 1), b) \\ &= \frac{1}{C_1(x + 1)} \cdot \left(C_3(x + 1) + \sum_{s=x+2}^b W(b - s, b) \cdot C_2(s, x + 1) \right) \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

so (9) is demonstrated.

From (B5) and (B6), we obtain the recursive formula for $C_1(x)$, $C_2(s, x)$ and $C_3(x)$, where the initial values are obtained from (B1) and (9).

To calculate $W(0, b)$, we calculate (4) for $c = 1$ and $x = b$, and (9) for $x = b - 1$, and we solve the system. ■

References

- [1] Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J., 1987. Actuarial Mathematics. Society of Actuaries. Schaumburg.
- [2] Bühlmann, H., 1970. Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlag. Heidelberg.
- [3] De Vylder, F.E., 1996. Advanced risk theory. Editions de l'Université de Bruxelles.
- [4] Gerber, H.U., 1972. Games of economic survival with discrete and continuous income process. Operations research, vol. 20, n°1. 37–45.
- [5] Gerber, H.U., 1981. On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier. Scandinavian Actuarial Journal. 105–115.
- [6] Gerber, H.U., 1988. Mathematical fun with compound binomial model. ASTIN Bulletin 18, 161–168.
- [7] Li, S., Garrido, J., 2002. On the time value of ruin in the discrete time risk model. Working paper 02–18. University Carlos III. Madrid.
- [8] Michel, R., 1989. Representation of a time-discrete probability of eventual ruin. Insurance: Mathematics and Economics. 8/1989. 149–152.
- [9] Paulsen, J., Gjessing, H.K., 1997. Optimal choice of dividend barriers for a risk process with stochastic return on investments. Insurance: Mathematics and Economics. 20/1997. 215–223.
- [10] Shiu, E., 1989. The probability of eventual ruin in the compound binomial model. ASTIN Bulletin 19, 179–190.
- [11] Siegl, T., Tichy, F., 1996. Lösungsverfahren eines Risikomodells bei exponentiell fallender Schadensverteilung. Mitteilungen der Schweiz. Heft 1/1996.
- [12] Siegl, T., Tichy, F., 1999. A process with stochastic claim frequency and a linear dividend barrier. Insurance: Mathematics and Economics. 24/1999. 51–65.
- [13] Willmot, G.E., 1993. Ruin probabilities in the compound binomial model. Insurance: Mathematics and Economics. 12/1993. 133–142.
- [14] Willmot, G.E., Cai, J., 2001. Aging and other distributional properties of discrete compound geometric distributions. Insurance: Mathematics and Economics. 28/2001. 361–379.

M.M. Claramunt
Departamento de Matemática Económica,
Financiera y Actuarial
Universidad de Barcelona
Avda. Diagonal, 690
08034 Barcelona
email-adress: mmclaramunt@ub.edu

Abstract

The process of free reserves in a non-life insurance portfolio as defined in the classical model of risk theory is modified by the introduction of dividend policies that set maximum levels for the accumulation of reserves. The work presents a general solution to calculate the expected present value of dividends based on a system of linear equations for discrete dividend payments in the case of a constant dividend barrier.

Résumé

On modifie le processus de réserves libres d'une compagnie d'assurances non-vie, tel qu'il est défini dans le modèle classique de la théorie du risque, en introduisant une politique de distribution de dividendes qui pose un niveau maximum d'accumulation de réserves. Ce travail présente une solution générale du calcul de l'espérance mathématique de la valeur actuelle des dividendes distribués, basée sur un système d'équations linéaires des paiements discrets dans le cas d'une barrière constante.

Zusammenfassung

Der Prozess der freien Reserven in einem Nichtleben-Versicherungsportefeuille, wie er im klassischen Modell der Risikotheorie definiert ist, wird modifiziert durch eine Dividendenpolitik, welche obere Schranken für das Äufnen der Reserven setzt. Für den Fall einer konstanten Dividendenschranke wird eine allgemeine Lösung für die Berechnung des erwarteten Barwerts der Dividenden vorgestellt. Diese Lösung basiert auf einem System linearer Gleichungen für diskrete Dividendenzahlungen.