

Lösungen zu Übungsserie 1

Aufgabe 1

Die reine Risikoprämie der ganzen Flotten von 1000 Fahrzeugen ist $\mu_{S_I} = 1\text{Mio}$ - sie entspricht dem erwartetem Schadenaufwand. Die dazugehörige Standardabweichung der ganzen Flotte ist $\sigma_{S_I} = 100'000\sqrt{1000} = 316'228$. Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\frac{S - \mu_{S_I}}{\sigma_{S_I}} \sim N(0, 1).$$

Somit kann die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers erster Art, dh die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schadenaufwand $\geq 1.2\text{Mio}$ beobachtet wird, geschätzt werden durch

$$P(S \geq 1.2\text{Mio}) = 1 - \Phi\left(\frac{S - \mu_{S_I}}{\sigma_{S_I}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1.2\text{Mio} - 1\text{Mio}}{316'228}\right) = 26.4\%.$$

Aufgabe 2

Wir benützen die Formel für den mean expected shortfall auf S.36 für $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$\text{ES}_\alpha^{\text{mean}}(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \sigma \varphi(\Phi^{-1}(\alpha)).$$

Unter Normalverteilung und vorgegebenem α haben wir

$$\text{mean expected shortfall} \propto \text{Standardabweichung}.$$

Sei u_i das Risikokapital für die Risikokategorie i .

a) Da die Risiken unabhängig sind, gilt

$$\sigma = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}$$

und somit

$$u = \sqrt{\sum_i u_i^2}.$$

Wir erhalten $u = 392.79$ das Risikokapital für das Total der Marktrisiken und einen Diversifikationseffekt von 46.8%.

b) Es gilt

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

oder in Matrixschreibweise

$$\sigma = \sqrt{\underline{\sigma}^T R \underline{\sigma}},$$

wobei $R = (\rho_{ij})_{i,j} = \text{Korrelationsmatrix}$

und somit

$$u = \sqrt{\underline{u}^T R \underline{u}}.$$

Wir erhalten $u = 350.35$ das Risikokapital für das Total der Marktrisiken und einen Diversifikationseffekt von 52.6%.

- c) Um von $\alpha = 99\%$ auf ein Sicherheitsniveau $\alpha' = 99.5\%$ zu gelangen beträgt der Erhöhungsfaktor für die einzelnen Risikokapitale

$$\frac{\frac{1}{1-\alpha}\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\frac{1}{1-\alpha'}\varphi(\Phi^{-1}(\alpha'))} = 8,5\%.$$

Aufgabe 3

- a) Nach Definition 1.10 des Value at Risk $\text{VaR}_\alpha(X)$ auf S.30 erhalten wir

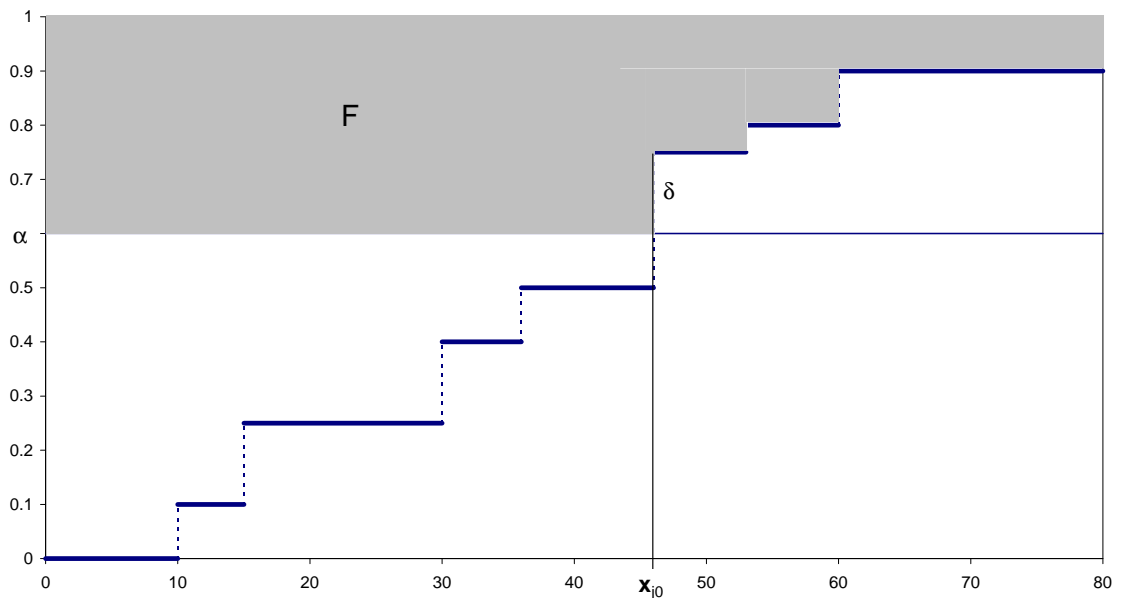
$$\text{VaR}_\alpha = \inf\{x \in R : F_X(x) \geq \alpha\} = x_{j_0}.$$

- b) – Wir benützen die Formel (1.12) auf S.32 zur Berechnung des Expected Shortfalls $\text{ES}_\alpha(X)$:

$$\begin{aligned} \text{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 F_X^{-1}(u) du \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_\alpha^{\alpha+\delta} F_X^{-1}(u) du + \int_{\alpha+\delta}^1 F_X^{-1}(u) du \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_\alpha^{\alpha+\delta} x_{j_0} du + \sum_{j=j_0+1}^{j_0} p_j x_j \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\delta x_{j_0} + E[X] - \sum_{j=1}^{j_0} p_j x_j \right). \end{aligned}$$

Bemerkung:

Die folgende Grafik illustriert geometrisch die Bedeutung von $\text{ES}_\alpha(X)$. Die Formel wird daraus sofort klar.



$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} F$$

- Der bedingte Erwartungswert $E[X|X > \text{VaR}_\alpha(X)]$ lässt sich bestimmen durch

$$E[X|X > \text{VaR}_\alpha(X)] = E[X|X > x_{j_0}] = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{j_0} p_j} \left(\sum_{j>j_0} p_j x_j \right).$$

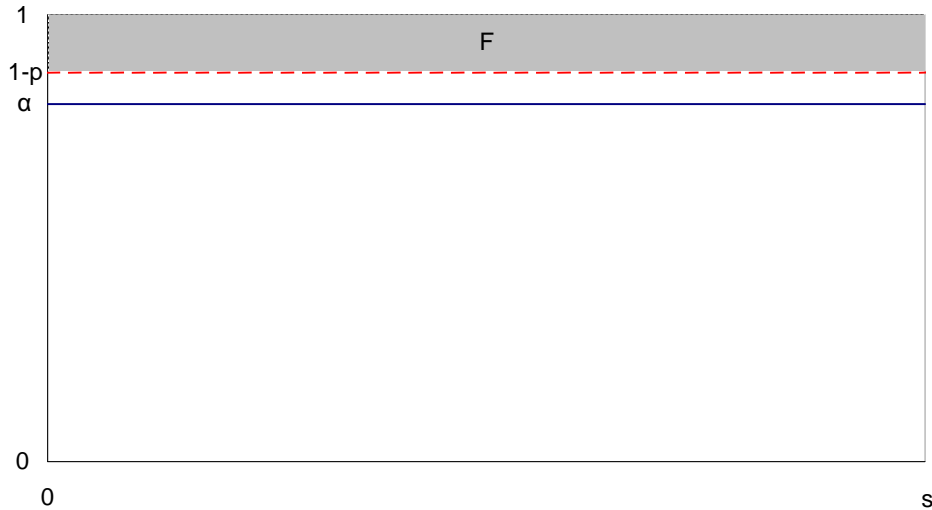
Also falls $\delta = 0$, dann ist $\text{ES}_\alpha(X) = E[X|X > \text{VaR}_\alpha(X)]$.

c) Für die drei Szenarien erhalten wir folgende Werte:

Szenario	VaR _{0.99}	ES _{99%}
S_1	0	150
S_2	0	300
S_3	300	300

Bemerkung:

Falls $1 - p > \alpha \Rightarrow \text{ES}_\alpha(S) = \frac{ps}{1-\alpha}$ und falls $1 - p \leq \alpha \Rightarrow \text{ES}_\alpha(S) = s$.



Aufgabe 4

Wir benutzen die Formel auf S. 36 für den Erwartungswert für S Lognormal-verteilt

$$E[S] = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

und die Formel auf S. 130 für den Variationskoeffizienten für S Lognormal-verteilt

$$Vko(S) := \frac{\sigma(S)}{E[S]} = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

und erhalten $\mu = 20$ und $\sigma = 0.12$ für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Normalverteilung.

a) Wir benutzen die Formel (1.8) auf S. 29 für die Berechnung des Risikokapital u

$$u = \sigma(S) \sqrt{\frac{|\ln \varepsilon|}{2(r - r_0)}}.$$

Wir erhalten $u = 2888$ Mio. Das Risikoloading auf der Prämie ist bestimmt durch

$$\frac{(r - r_0)u}{E[S]} = 5.8\%.$$

b) Für die Berechnung des Risikokapitals mit mean Value at Risk erhalten wir aus der Definition 1.11 S.31 und der Lognormal-Verteilungsfunktion (S.36) folgende Gleichung zum lösen

$$F_S(\text{VaR}_{0.99}(S)) = \Phi\left(\frac{\ln \text{VaR}_{0.99}(S) - \mu}{\sigma}\right) = 0.99.$$

$$\text{VaR}_{0.99}(S) = 656 \text{ Mio}$$

und somit

$$\begin{aligned} u &= \text{VaR}_{0.99}^{\text{mean}}(S) = 156 \text{ Mio}, \\ \text{Risikoloading} &= \frac{(r - r_0)u}{E[S]} = 3.1\%. \end{aligned}$$

c) Wir verwenden die Formel auf S. 36 für die Berechnung des Risikokapitals mit mean Expected Shortfall

$$\text{ES}_{\alpha}^{\text{mean}}(S) = \frac{1}{1 - \alpha} E[S] (\alpha - \Phi(\Phi^{-1}(\alpha) - \sigma))$$

und erhalten

$$\begin{aligned} u &= \text{ES}_{0.99}^{\text{mean}}(S) = 183 \text{ Mio}, \\ \text{Risikoloading} &= \frac{(r - r_0)u}{E[S]} = 3.7\%. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Die Expected Shortfalls werden nach der Formel der Aufgabe 3 bestimmt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Summe der beiden Branchen wird mit der Faltung numerisch gerechnet. Für die detaillierte Berechnung verweisen wir auf das Excel-File.

Numerisch erhalten wir folgende Resultate:

- a) Branche 1: $\text{ES}_{0.99}^{\text{mean}}(X_1) = 13.76$.
Branche 2: $\text{ES}_{0.99}^{\text{mean}}(X_2) = 8.48$.
- b) Branche 1 zusammen mit Branche 2: $\text{ES}_{0.99}^{\text{mean}}(X_1 + X_2) = 15.1$
- c) Diversifikationseffekt ist definiert durch:

$$1 - \frac{\text{ES}_{0.99}^{\text{mean}}(X_1 + X_2)}{\text{ES}_{0.99}^{\text{mean}}(X_1) + \text{ES}_{0.99}^{\text{mean}}(X_2)} = 32.5\%.$$

Aufgabe 6

Es gilt ganz allgemein, dass

- i) $\text{ES}_{\alpha}^{\text{mean}}(X) = \text{ES}_{\alpha}(X - \mu_X)$, da nur die Abweichung zum Erwartungswert betrachtet wird;
- ii) $\text{ES}_{\alpha}(aX) = a\text{ES}_{\alpha}(X)$.

Da bei der Normalverteilung σ ein Skalaparameter ist, gilt somit für $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$\text{ES}_{\alpha}^{\text{mean}}(X) = \sigma \text{ES}_{\alpha}(S) = \sigma \text{ES}_{\alpha}^{\text{mean}}(S), \text{ für } S \sim N(0, 1).$$

Es genügt somit die Formel für S zu zeigen. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \text{ES}_{\alpha}^{\text{mean}}(S) &= E[S|S \geq q_{\alpha}] = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q_{\alpha}}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= -\frac{1}{1 - \alpha} \varphi(x) \Big|_{q_{\alpha}}^{\infty} = \frac{1}{1 - \alpha} \varphi(q_{\alpha}) = \frac{1}{1 - \alpha} \varphi(\Phi^{-1}(\alpha)). \end{aligned}$$