

Lösungen zu Übungsserie 2

Aufgabe 1

- a) i) Für den Schadenaufwand ohne Szenario gilt $X \sim \Gamma(\gamma, c)$,

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{\gamma}{c} = 800, & Vko(X) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = 5\% \\ \Rightarrow \gamma &= 400, & c &= 0.5 \end{aligned}$$

und somit

$$q_\alpha(X) = 895.98.$$

Mit der Formel auf S. 36 für den mean expected shortfall erhalten wir

$$u_X = \text{ES}_{0.99}^{\text{mean}}(X) = \frac{1}{1-0.99} E[X](0.99 - \mathcal{G}(401, 895.98)) = 110.72 \text{ Mio.}$$

- ii) Wir verwenden das Resultat der Übungsserie 1 Aufgabe 3 c) für den expected shortfall mit $1-p > \alpha$ und erhalten

$$u_S = \text{ES}_{0.99}^{\text{mean}}(S) = \frac{E[S]}{1-0.99} - E[S] = \frac{1}{1-0.99} (0.7\% \cdot 100) - (0.7\% \cdot 100) = 69.30 \text{ Mio.}$$

- iii) Herleitung der Formel im Hinweis:

$$\begin{aligned} \int_d^\infty x f_X(x) dx &= \frac{c^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \int_d^\infty x^\gamma e^{-cx} dx \\ &= \frac{1}{c} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma)} \underbrace{\frac{c^{\gamma+1}}{\Gamma(\gamma+1)} \int_d^\infty x^\gamma e^{-cx} dx}_{P(Y \geq d)} \\ &= \frac{\gamma}{c} \cdot P(Y \geq d) \end{aligned}$$

wobei $Y \sim \Gamma(\gamma+1, c)$

$$\Rightarrow \int_d^\infty x f_X(x) dx = E[X] \cdot (1 - P(Y \leq d)) \quad (1)$$

□

$$E[T] = E[X] + E[S] = 800.7.$$

Da X und S unabhängig gilt, dass die Verteilungsfunktion von T gegeben ist durch

$$F_T(t) = (1-p) \cdot \mathcal{G}(\gamma, ct) + p \cdot (\mathcal{G}(\gamma, c(t-100))). \quad (2)$$

Für die Bestimmung des α -Quantils q_α setzt man $F_T(t) = \alpha$ (diese Gleichung kann numerisch gelöst werden, z.B. in Excel mit dem Solver)

$$\Rightarrow q_\alpha^T := q_\alpha(T) = 902.21.$$

Aus (2) erhalten wir die Dichte von T

$$f_T(t) = (1-p) \cdot f_X(x) + p \cdot f_X(x-100)$$

wobei $f_X(x)$ die Dichte von X bezeichnet.

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} ES_\alpha(T) &= \frac{1}{1-\alpha} \left((1-p) \int_{q_\alpha^T}^{\infty} x f(x) dx + p \int_{q_\alpha^T}^{\infty} x f(x-100) dx \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left((1-p) \int_{q_\alpha^T}^{\infty} x f(x) dx + p \left(\int_{q_\alpha^T-100}^{\infty} x f(x) dx + 100 \cdot P(X > q_\alpha^T - 100) \right) \right) \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{1-\alpha} \left((1-p) E[X] (1 - P(Y \leq q_\alpha^T)) \right. \\ &\quad \left. + p (E[X] (1 - P(Y \leq q_\alpha^T - 100)) + 100 \cdot P(X > q_\alpha^T - 100)) \right) \\ &= 922.14 \end{aligned}$$

und daraus

$$u_T = ES_\alpha^{\text{mean}}(T) = ES_\alpha(T) - E[T] = 121.44 \text{ Mio.}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} Cov(X, T) &= Var(X) = \frac{\gamma}{c^2} = 1'600 \text{ Mio}^2 \\ Cov(S, T) &= Var(S) = 0.7\% \cdot (1 - 0.7\%) \cdot 100^2 = 69.51 \text{ Mio}^2 \\ Var(T) &= Var(X) + Var(S) = 1'669.51 \text{ Mio}^2. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir folgende Aufteilung nach dem Kovarianzprinzip (siehe S. 45)

$$\begin{aligned} u_X &= ES_{0.99}^{\text{mean}}(T) \frac{Var(X)}{Var(T)} = 116.38 \text{ Mio}, \\ u_S &= ES_{0.99}^{\text{mean}}(T) \frac{Var(S)}{Var(T)} = 5.06 \text{ Mio}. \end{aligned}$$

Kommentar:

Die Aufteilung nach dem Kovarianzprinzip liefert in diesem Fall keine sinnvollen Resultate, da das für X notwendige Kapital grösser ist als das "stand alone" Kapital von X .

c) Sei $s_0 = 100$, es gilt (siehe Hinweis)

$$\begin{aligned} ES_\alpha(S|T) &= s_0 P[S = s_0 | T \geq q_\alpha^T] = \frac{s_0}{1-\alpha} P[S = s_0 \wedge X \geq q_\alpha^T - s_0] \\ &= \frac{1}{1-\alpha} s_0 P[S = s_0] P[X \geq q_\alpha^T - s_0] = \frac{p}{1-\alpha} s_0 (1 - \mathcal{G}(\gamma, c(q_\alpha^T - s_0))). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$u_S = ES_\alpha^{\text{mean}}(S|T) := ES_\alpha(S|T) - E[S] = 32.29 \text{ Mio}$$

und aus $ES_\alpha^{\text{mean}}(T) = ES_\alpha^{\text{mean}}(X|T) + ES_\alpha^{\text{mean}}(S|T)$ folgt

$$u_X = ES_\alpha^{\text{mean}}(X|T) = 89.15 \text{ Mio.}$$

Aufgabe 2

a) Der erwartete Schadenaufwand für die Branche i berechnet sich aus

$$E[S_i] = \mu_i \nu_i,$$

mit der Formel für Vko^2 auf S.84 und $\nu_i = V\lambda_0$ erhalten wir

$$Vko^2(S_i) = Vko_{Param}^2 + \frac{1}{\nu_i} (Vko(Y_i)^2 + 1)$$

und aus $Vko(S_i) = \frac{\sigma(S_i)}{E[S_i]}$ lässt sich die Standardabweichung für die Branche i berechnen.

Branche	$E[S_i]$ in 1'000	$Vko(S_i)$	σ_i in 1'000
MFH	128'375	6.6%	8'420
MFK	84'165	3.8%	3'200
Sach	61'875	6.2%	3'857
Haft	56'250	8.0%	4'509

Für den Schadenaufwand im Total über alle Branchen ergibt sich dann

$$E[S] = \sum_{i=1}^4 E[S_i] = 330'665 \text{ (in 1'000),}$$

$$\sigma(S) = \sqrt{\underline{\sigma}^T R \underline{\sigma}} = 13'310 \text{ (in 1'000),}$$

wobei $\underline{\sigma}^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ und R die Korrelationsmatrix ist,

$$Vko(S) = \frac{\sigma(S)}{E[S]} = 4.0\%.$$

b) Aus $E[S] = \gamma/c$ und $Vko(S) = 1/\sqrt{\gamma}$ für die Gamma-Verteilung $\Gamma(\gamma, cx)$ erhalten wir

$$\gamma = 617.67, \quad c = 1.866 \cdot 10^{-3}.$$

Wir benützen die Formel auf S.36 für den mean expected shortfall, wobei zuerst das 99%-Quantil $q_{0.99}(S)$ (z.B in Excel mit der Funktion Gammainv) berechnet werden muss und erhalten (in 1'000)

$$u_S = \text{ES}_{0.99}^{\text{mean}}(S) = 36'579.$$

c) $\text{Cov}(S_i, S) = \sum_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$ und wir erhalten für die einzelnen Branchen (in 1'000)

$$u_{MFH} = u_S \cdot \frac{\text{Cov}(S_{MFH}, S)}{\text{Var}(S)} = 36'579 \cdot 52.98\% = 19'381$$

$$u_{MFK} = u_S \cdot \frac{\text{Cov}(S_{MFK}, S)}{\text{Var}(S)} = 36'579 \cdot 15.13\% = 5'535$$

$$u_{Sach} = u_S \cdot \frac{\text{Cov}(S_{Sach}, S)}{\text{Var}(S)} = 36'579 \cdot 12.60\% = 4'608$$

$$u_{Haft} = u_S \cdot \frac{\text{Cov}(S_{Haft}, S)}{\text{Var}(S)} = 36'579 \cdot 19.29\% = 7'055$$

Aufgabe 3

a) Betrachte die folgenden Ereignisse

- E_6 : die letzten sechs Jahre schadenfrei
- $E_3 \cap E_6^C$: die letzten drei Jahre schadenfrei, aber nicht die letzten sechs Jahre schadenfrei
- E_3^C : die letzten drei Jahre nicht schadenfrei

Wir erhalten

$$\begin{aligned}P(E_6) &= e^{-6\lambda} = 0.3, \\P(E_3 \cap E_6^C) &= e^{-3\lambda} (1 - e^{-3\lambda}) = 0.25, \\P(E_3^C) &= 1 - e^{-3\lambda} = 0.45.\end{aligned}$$

Der erwartete Anteil der Grundprämie, der nach Einführung des SFR noch bezahlt wird, ist

$$q = 0.8P(E_6) + 0.9P(E_3 \cap E_6^C) + P(E_3^C) = 0.915$$

und somit beträgt der notwendige Zuschlag auf die Grundprämie $\frac{1}{q} - 1 = 9.3\%$.

b) Es seien

- N_6 = Schadenanzahl eines zufällig herausgegriffenen Risikos in den letzten 6 Jahren,
- N_3 = Schadenanzahl eines zufällig herausgegriffenen Risikos in den letzten 3 Jahren,
- N_3^* = Schadenanzahl eines zufällig herausgegriffenen Risikos in den ersten 3 Jahren der 6-Jahres-Periode

und E_6 , $E_3 \cap E_6^C$, E_3^C definiert wie in a). Aufgrund der getroffenen Annahmen gilt (Skript S. 96)

$$N_6 \sim \text{NegBin}(6\lambda, h), \quad N_3 \sim \text{NegBin}(3\lambda, h),$$

wobei

$$\lambda = 0.2, \quad h = 1.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}P(E_6) &= \frac{1}{1 + 6\lambda} = \frac{1}{2.2} = 0.455, \\P(E_3^C) &= 1 - \frac{1}{1 + 3\lambda} = \frac{0.6}{1.6} = 0.375.\end{aligned}$$

$P(E_3 \cap E_6^C)$ ist etwas komplizierter. Zu beachten ist, dass bei negativ binomial N_3 und N_3^* nicht unabhängig sind. Sie sind nur bedingt, gegeben $\Theta = \theta$, unabhängig.

Es gilt somit

$$P(E_3 \cap E_6^C) = \int_0^{\infty} e^{-3\lambda\theta} (1 - e^{-3\lambda\theta}) f(\theta) d\theta,$$

wobei $f(\theta) = e^{-\theta}$ (Gamma-Dichte mit $\gamma = h$, $c = h$).

Daraus erhalten wir

$$P(E_3 \cap E_6^C) = \frac{1}{1 + 3\lambda} - \frac{1}{1 + 6\lambda} = 0.170.$$

Der notwendige Zuschlag auf die Grundprämie beträgt (analog wie in a)) 12.1%.

Beachte, dass der notwendige Zuschlag deutlich höher ist als bei a).

Aufgabe 4

Nullhypothese $H_0: N_j \sim Poi(\lambda)$, N_1, N_2, \dots unabhängig

Wir testen zum Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ unter Verwendung der Teststatistik auf S.95.

Für mittlere beobachtete Schadenanzahl erhalten wir

$$\bar{N} = \sum_{j=1}^{20} \frac{N_j}{20} = 1.45$$

und somit

$$T = \sum_{j=1}^{20} \frac{(N_j - \bar{N})^2}{\bar{N}} = 18.95$$

wobei T unter H_0 χ^2 verteilt ist mit 19 Freiheitsgraden.

Wir berechnen das $(1 - \alpha)$ -Quantil von χ_{19}^2

$$q_{1-\alpha} = 30.15$$

$\Rightarrow H_0$ wird nicht verworfen (auf Niveau 5%) da $T \leq q_{1-\alpha}$.

Aufgabe 5

a)

$$\begin{aligned} M_X(z) := E[e^{zX}] &= \int_0^\infty e^{zx} \frac{c^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-cx} dx = \frac{c^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty x^{\gamma-1} e^{-(c-z)x} dx \\ &= \frac{c^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \frac{\Gamma(\gamma)}{(c-z)^\gamma} = \frac{c^\gamma}{(c-z)^\gamma} \quad \text{für } c < z. \end{aligned}$$

b) Wir nutzen die Kumulanten-erzeugende Funktion (siehe Anhang S. 3), um die ersten drei Momente zu berechnen.

$$K_X(z) = \ln(M_X(z)) = \gamma(\log(c) - \log(c-z)),$$

daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} E[X] &= \left. \frac{d}{dz} K_X(z) \right|_{z=0} = \left. \frac{\gamma}{c-z} \right|_{z=0} = \frac{\gamma}{c}, \\ \text{Var}(X) &= \left. \frac{d^2}{dz^2} K_X(z) \right|_{z=0} = \left. \frac{\gamma}{(c-z)^2} \right|_{z=0} = \frac{\gamma}{c^2}, \\ \mu_3(X) &= \left. \frac{d^3}{dz^3} K_X(z) \right|_{z=0} = \left. \frac{2\gamma}{(c-z)^3} \right|_{z=0} = \frac{2\gamma}{c^3} \\ \Rightarrow \text{Schiefe}(X) &= \frac{\mu_3(X)}{\sigma_X^3} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}. \end{aligned}$$