Übungsserie 2

Aufgabe 1

Bei einem Versicherungsportfolio ist mit einem Jahresschadenaufwand X zu rechnen. Zusätzlich ist ein davon unabhängiger Szenario-Schaden S mit vorgegebenem Ausmass und vorgegebener Eintrittswahrscheinlichkeit denkbar.
Wir treffen die folgenden Annahmen:

i) X ist Gamma-verteilt mit $E[X] = 800$ Mio und $Vko(X) = 5\%$.

ii) Szenario-Schaden:

$$S = \begin{cases} 100 \text{ Mio} & \text{mit W'keit} \quad p = 0.7\% \\ 0 & \text{mit W'keit} \quad 1 - p = 99.3\% \end{cases}$$

Löse die folgenden Teilaufgaben:

a) Für die Risikokapitalbestimmung wird der mean expected shortfall zum Sicherheitsniveau $\alpha = 99\%$ verwendet.
Berechne als erstes die benötigten "stand alone" Risikokapitalien u_X und u_S, wenn die Risiken X und S isoliert für sich allein betrachtet werden.
Berechne als zweites das Risikokapital u_T für den Gesamtaufwand $T = X + S$.

Hinweis:
Zeige als erstes folgendes Resultat und verwende dieses für die Berechnung von u_T.

$$\text{Falls } X \sim \Gamma(\gamma, c), \text{ dann ist } \int_d^\infty x f_X(x) dx = E[X](1 - P(Y \leq d)), \text{ wobei } Y \sim \Gamma(\gamma + 1, c).$$

b) Teile das Gesamtrisikokapital u_T auf die Risiken X und S auf unter Verwendung des Kovarianzprinzips und vergleiche die erhaltenen Resultate mit den stand-alone Kapitalien u_X und u_S.

c) Wie b), aber Aufteilung gemäss expected shortfall Prinzip $ES_\alpha^{mean}(X|T)$, $ES_\alpha^{mean}(S|T)$, wobei $ES_\alpha^{mean}(X|T) := ES_\alpha(X|T) - E[X]$.

Hinweis:
Beachte, dass $ES_\alpha(S|T) = 100 \cdot P(S = 100 | T \geq q_\alpha)$.

Aufgabe 2

Das Portefeuille einer "vereinfachten" Versicherungsgesellschaft bestehe aus 4 Branchen ($i = 1, \ldots, 4$):
MFH (Motorfahrzeug-Haftpflicht), MFK (Motorfahrzeug-Kasko), Sach und Haft (allgemeine Haftpflicht).
Wir bezeichnen mit S_i den Normalschadenaufwand Geschäftsjahr für die Branche i und es sei $S = \sum_i S_i$ der Normalschadenaufwand des gesamten Portefeuilles. Wir interessieren uns für die Risikokapitalberechnung von S gemäss SST-Standardmodell.
Die nachfolgende Tabelle zeigt für das betrachtete Versicherungsportfolio die zu erwartenden Schadendurchschnitte μ_i und die zu erwartenden Schadenanzahlen ν_i in den einzelnen Branchen.

Branche	μ_i	ν_i
MFH	$7'900$	$16'250$
MFK	$1'860$	$45'250$
Sach	$3'300$	$18'750$
Haft	$4'500$	$12'500$

Die nachfolgenden Tabelle zeigt die im SST-Lauf 2005 vorgegebenen Standardwerte für das Parameter- und Schwankungsrisiko, und zwar die Variationskoeffizienten

$$Vko_{Param} := \sqrt{Vko^2\left(\mu_Y\left(\Theta_2\right)\right) + Vko^2\left(\lambda\left(\Theta_1\right)\right)},$$

sowie die Variationskoeffizienten der Einzelschadenhöhen $Vko\,(Y)$.

Branche	Vko_{Param}	$Vko\,(Y)$
MFH	3.5%	7
MFK	3.5%	3
Sach	5.0%	5
Haft	3.5%	8

Zudem war im SST-Lauf 2005 für das Standardmodell die folgende Korrelationsmatrix für den Normal-Schadenaufwand der einzelnen Branchen vorgegeben

Branche	MFH	MFK	Sach	Haft
MFH	1.00	0.50	0.00	0.25
MFK	0.50	1.00	0.25	0.00
Sach	0.00	0.25	1.00	0.25
Haft	0.25	0.00	0.25	1.00

a) Berechne für jede Branche i sowie für das Total über alle Branchen den Erwartungswert, den Variationskoeffizienten und die Standardabweichung des Schadenaufwand.

   Hinweise:
   Verwende für die Berechnung der Variationskoeffizienten $Vko\,(S_i)$ die Formel auf Seite 84 des Skriptes.

b) Modelliere den Gesamtschadenaufwand S durch eine Gamma-Verteilung, wobei die Parameter mit der Momentenmethode geschätzt werden. Berechne dann aufgrund dieser Modellierung das notwendige Risikokapital für S unter Verwendung von $ES_{0.99}^{mean}\,(S)$ als Risikomass.

c) Verteile das Gesamtrisikokapital auf die einzelenen Branchen mittels des Kovarianzprinzips.

Aufgabe 3

Eine Versicherungsgesellschaft will in einer bestimmten Branche mit Schadenfrequenz $\lambda = 0.2$ einen Schadenfreiheitsrabatt (SFR) einführen:

10% SFR nach drei schadenfreien Jahren
20% SFR nach sechs schadenfreien Jahren

Welchen Zuschlag muss die Gesellschaft in ihren Prämien einrechnen, damit daraus der SFR finanziert werden kann?

Bemerkung:
Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden an, dass alle Risiken mindestens sechs Jahre versichert sind und 'potentiell' für den Maximalrabatt von 20% in Frage kommen. Die Berechnungen für ein Portefeuille mit Zu- und Abgängen sind nicht schwierig, sie geben lediglich etwas mehr zu rechnen.

Beantworte die Frage für jede der beiden folgenden Annahmen:

a) Annahme homogenes Portefeuille
Die Jahresschadenanzahlen der einzelnen Risiken im Portefeuille sind unabhängig und $Poi\,(\lambda = 0.2)$.

b) Annahme heterogenes Portefeuille
Es hat bessere und schlechtere Risiken im Portefeuille. Der Poissonparameter kann von Risiko zu Risiko variieren. Bezeichnen wir mit Λ den Poissonparameter eines zufällig herausgegriffenen Risikos, so ist Λ selber eine Zufallsgrösse mit Erwartungswert $\lambda = 0.2$. Ferner nehmen wir an, dass der Variationskoeffizient von Λ gerade 1 beträgt (a priori Annahme) und Λ eine Gammaverteilung hat (d.h. Portefeuillestruktur lässt sich durch eine Gammaverteilung beschreiben).

Aufgabe 4

Über die letzten 20 Jahre wurden im Bereich der Naturgefahren folgende Anzahlen von Elementar-Grossschadenereignissen (Aufwand $>$ 10 Mio) beobachtet:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	18	19	20
Anzahl	0	1	1	2	4	1	0	2	1	2	2	1	0	1	1	0	4	3	1	2

Teste die Nullhypothese H_0: $N_j \sim Poi\,(\lambda)$ (auf dem 5% Niveau).

Aufgabe 5

Es sei X Gamma-verteilt mit Formparameter γ und Skalenparameter c.

a) Zeige, dass die Momenten-erzeugende Funktion wie folgt lautet:

$$M_X\,(z) := E\left[e^{zX}\right] = \left(\frac{c}{c-z}\right)^{\gamma}.$$

b) Bestimme $E\,[X]$, $Var\,(X)$, Schiefe(X) unter Verwendung von a).